Научно-практическая конференция «Старт в науку»

Научно-исследовательская работа:

«Применение дополнительных построений в решении геометрических задач»

Автор:
Трунова Ксения Дмитриевна,
муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа г.Сурска,
9 класс

Научный руководитель:
Кадеркаева Наиля Кязымовна,
учитель математики высшей квалификационной категории муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения средняя общеобразовательная школа
г. Сурска

2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дополнительные построения занимают важное место среди различных методов решения геометрических задач. Например, теорема о площади треугольника, теорема Пифагора, теорема о пересечении высот треугольника и многие другие. При подготовке к экзамену по математике большинство задач по планиметрии не решается с помощью строгих алгоритмов, почти каждая геометрическая задача требует своего подхода.

Искусство решать задачи основывается на хорошем знании теории, на знании достаточного количества геометрических фактов и в овладении приёмами и методами решения.

Эти методы обладают некоторыми особенностями: большое разнообразие, трудность формального описания, взаимозаменяемость, отсутствие чётких границ области применения.

При решении геометрических задач используются три основных метода:

— геометрический – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем;

— алгебраический – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;

— комбинированный – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других - алгебраическим.

Во многих случаях решать задачи помогает введение в чертеж дополнительных линий - так называемые дополнительные построения. Такие дополнительные построения, вводящие новые углы и новые отрезки, иногда приводят к появлению геометрических фигур, облегчающих решение задачи. Представленные данные говорят об актуальности изучения метода дополнительных построений.

Объект исследования: планиметрические задачи

Предмет исследования: метод дополнительных построений

Цель работы: выяснить, в чем состоит суть метода дополнительных построений; узнать, при решении каких задач целесообразно использовать метод дополнительных построений.

Задачи:

— выявить, при решении каких задач метод дополнительных построений является наиболее эффективным;

— изучить разнообразные методы, которые могут быть успешно применены при решении многих геометрических задач;

— провести группировку различных видов дополнительного построения.

В процессе работы я использовала следующие методы исследования:

— анализ математической и методической литературы;

— анализ геометрических задач, которые предлагались на ЕГЭ и ОГЭ;

— классификация дополнительных построений;

— математическое моделирование;

— поиск рационального способа решения задачи методом дополнительного построения.

Теоретическая значимость: исследовательская работа позволяет расширить знания о методе дополнительных построений при решении геометрических задач.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования ее результатов учениками, учителями математики.

1 ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ КАК МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1.1 Приёмы дополнительного построения

Решение геометрической задачи начинается с работы над чертежом. Часто на чертеже, особенно в геометрических задачах, которые предлагаются на различных олимпиадах, трудно заметить связи между данными и искомыми величинами. В подобных ситуациях решить задачу помогают дополнительные линии, которые проводятся для того, чтобы свести задачу к ранее решенной или более простой задаче. Они позволяют включить в задачу новые фигуры с их свойствами, тем самым увеличить число теорем, которые можно использовать при решении задачи.

Приёмы дополнительного построения, которые используются при решении геометрических задач можно разделить на два вида - это разбиение фигур и дополнение.

Разбиение фигур:

— проведение в многоугольнике прямой, параллельной одной из имеющихся (или параллельных прямых), что позволяет применять подобие;

— разбиение фигуры на части с целью получения треугольника и параллелограмма (в том числе ромба, квадрата), что позволяет применять свойства этих фигур;

— проведение перпендикуляров, радиусов окружности в точки касания, высот в трапеции позволяют получить прямоугольные треугольники.

Дополнение фигур:

— построение параллелограмма, с помощью продления медианы треугольника, что позволяет применять свойства параллелограмма;

— построение дополнительного треугольника;

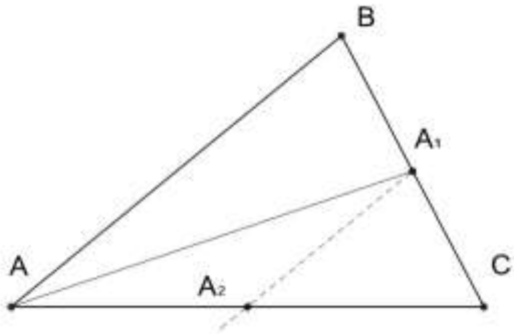
— построение вспомогательной окружности с целью применения свойств хорд, касательных и углов, связанных с окружностью.

Рассмотрим дополнительные построения, использование которых целесообразно при решении планиметрических задач, связанных с треугольниками и четырёхугольниками [4].

1.2 Разбиение фигур

1.2.1 Построение прямой параллельной одной из имеющихся (или параллельных прямых)

Если в треугольнике известен отрезок AA_1, то через точку A_1 проводится прямая, параллельная стороне AB, до её пересечения со стороной AC (рис.1). По теореме о пропорциональных отрезках получаем $\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{A_2A}{A_1B}$. Если отрезок AA_1 является медианой, то по теореме Фалеса A_2 – середина стороны AC.



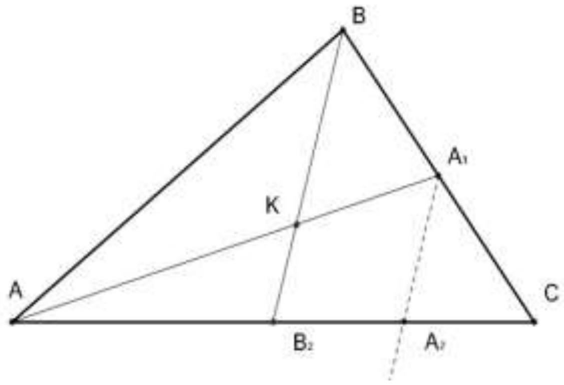


Рис. 1 Рис. 2

Если в треугольнике известны два отрезка, проведённые из разных вершин, в том числе биссектриса, высота, или медиана, то через основание одного из них проводится прямая, параллельная данному отрезку, до её пересечения со стороной треугольника (рис. 2, рис.3). Так на рис. 2 прямая KB_2 отсекает от треугольника AA_1A_2 подобный ему треугольник AKB_2, а прямая A_1A_2 – треугольник CA_1A_2, подобный треугольнику CBB_2.

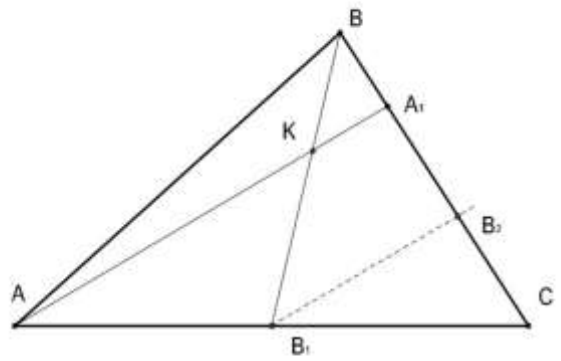


Рис. 3

1.2.2 Разбиение фигуры на части для получения треугольника и параллелограмма

Если в треугольнике (рис. 4), параллелограмме (рис. 5) или трапеции (рис. 6, рис. 7) дана биссектриса одного из внутренних углов, то можно построить ромб, две стороны которого лежат на сторонах данного треугольника или четырехугольника, а биссектриса является диагональю. Такое построение позволяет использовать свойства этих фигур.

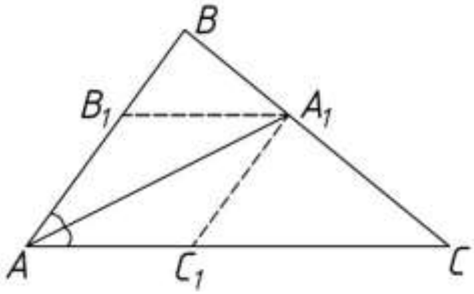


Рис.4

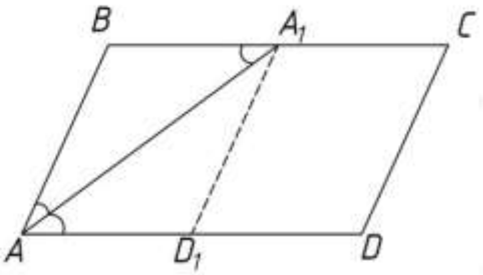


Рис.5

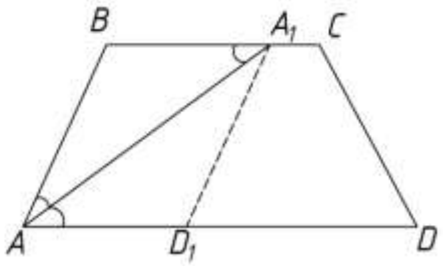


Рис.6

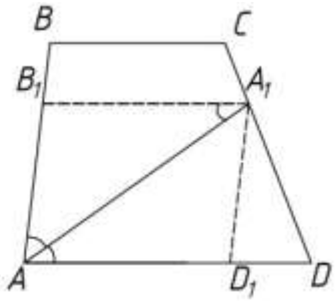


Рис.7

1.2.3 Проведение перпендикуляров

Проведённые перпендикуляры позволяют получить прямоугольные треугольники и использовать теорему Пифагора, теоремы о подобии треугольников.

Часто в задачах используются такие дополнительные построения как проведение радиусов окружности в точки касания, высот в трапеции.

1.3 Дополнение фигур

1.3.1 Удвоение медианы

Так, если в условии задачи известна медиана треугольника, то удвоив её, мы получим параллелограмм (рис.8), что позволит использовать его свойства.

В зависимости от содержания задачи такое дополнительное построение можно выполнять и для двух, и для трёх медиан; использовать не весь параллелограмм, а только его части, например, треугольника AA_2C (рис. 8).

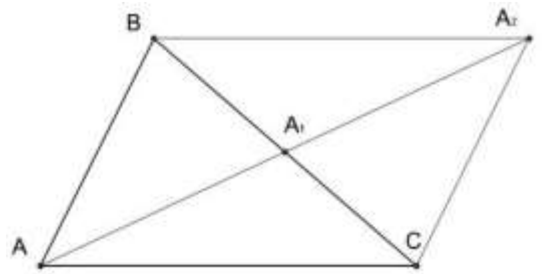


Рис. 8

1.3.2 Дополнительное построение треугольника

1) В результате построения, выполненного на рис. 9 ($AB_2 \parallel BC$) и рис. 10 ($AC \parallel BA_2$), появляются две пары подобных треугольников. Так, на рисунке 9 ΔAKB_2 и ΔA_1KB; ΔAB_1B_2 и ΔCB_1B; на рис. 10 ΔAKB_1 и ΔA_2KB; ΔAA_1C и ΔA_2A_1B подобны.

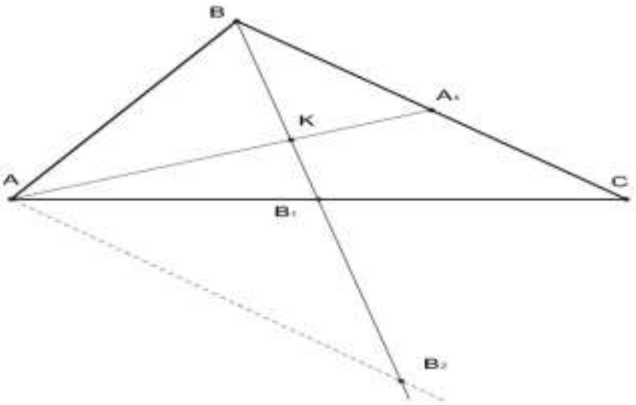


Рис. 9

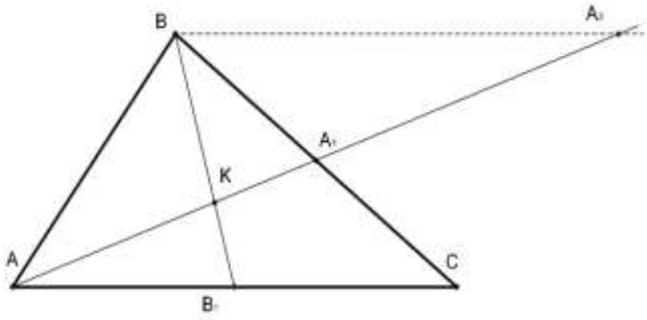


Рис. 10

На рис. 11 и рис 12 ($AM_1 \parallel BC$, $L_1 = KM \cap BC$) $\Delta\ ALM_1$ подобен $\Delta\ BLL_1$, ΔAMM_1 подобен ΔCML_1, $\Delta\ AKM_1$ подобен $\Delta\ KA_1L_1$.

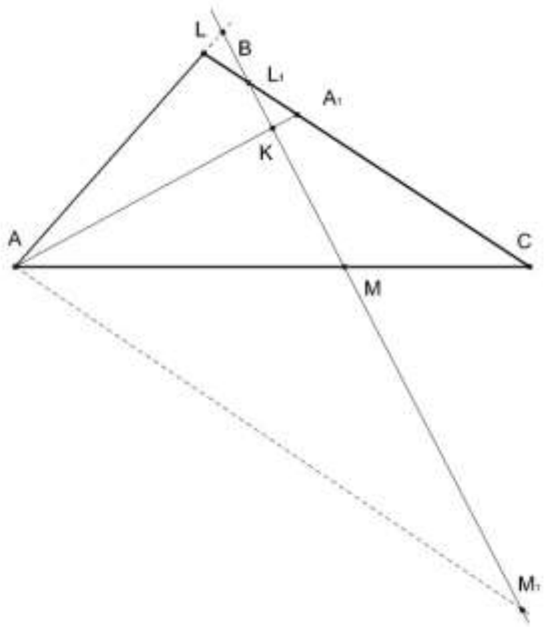


Рис.11

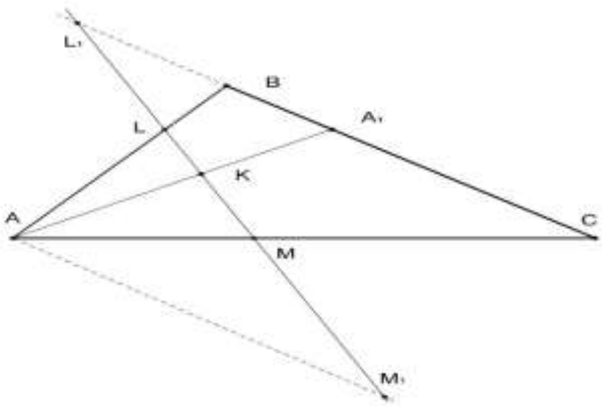


Рис.12

2) Если даны две окружности разных радиусов (не имеющие общих точек, пересекающиеся в двух точках или касающиеся внешним образом) с секущей, проходящей через одну из точек пересечения окружностей (или общей касательной), то через центр меньшей окружности проводится прямая, параллельная данной секущей (или касательной). Находится точка пересечения с радиусом большей окружности, проведённым в точку касания, или с его

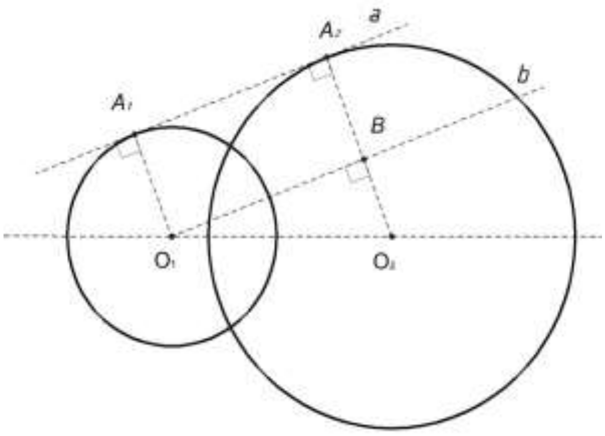


Рис.13

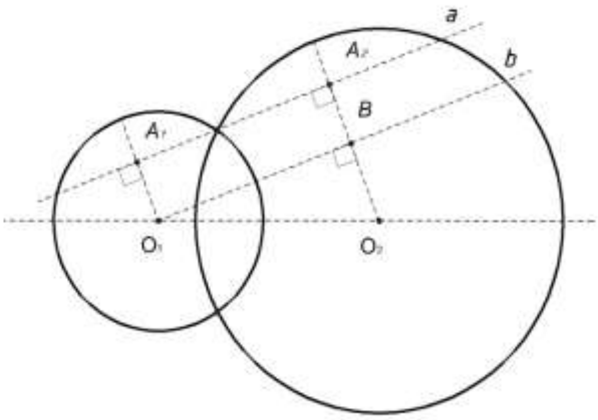


Рис.14

продолжением

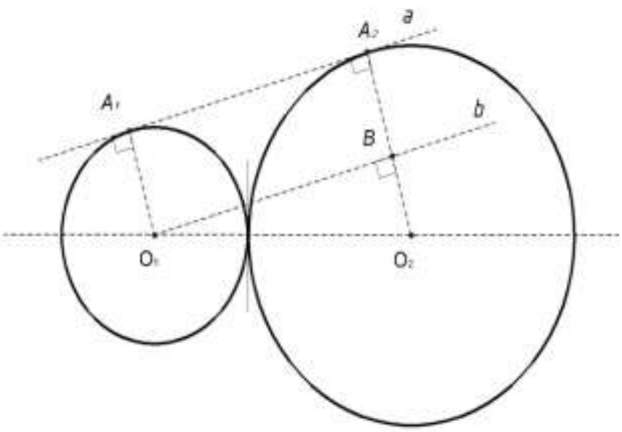


Рис.15

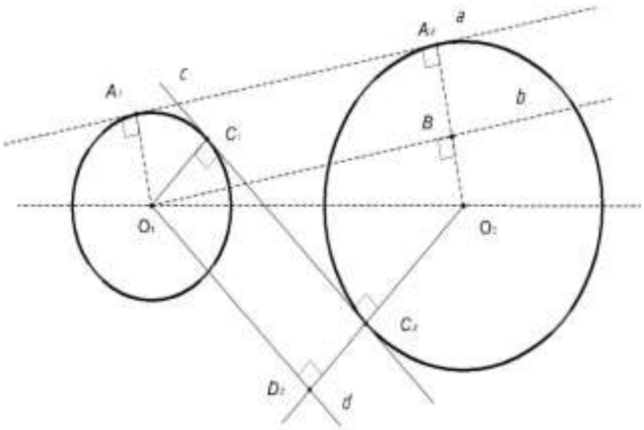


Рис.16

Результатом этих дополнительных построений является прямоугольный треугольник. В треугольнике вершины острых углов совпадают с центрами данных окружностей, один из катетов равен половине отрезка секущей, расположенного внутри окружностей (или отрезку касательной, заключенному между точками касания), а другой сумме (для случая с внутренней касательной) или - разности (для случая с внешней касательной) радиусов этих окружностей. В случае касания данных окружностей (рис. 15) гипотенуза O_1O_2 Δ O_1O_2B равна сумме радиусов этих окружностей (r_1 и r_2), поэтому расстояния между точками касания окружностей с их общей внешней касательной можно найти по формуле $A_1A_2=2\sqrt{r_1}r_2$

3) Прямоугольный треугольник достраивается до равнобедренного треугольника/

Если дан прямоугольный треугольник, то он достраивается до равнобедренного треугольника. Один из катетов данного треугольника становится, медианой, биссектрисой и высотой, а другой – половиной основания.

4) Если дана трапеция, то с помощью продолжения боковых сторон она достраивается до треугольника.

5) Если в треугольнике, параллелограмме или трапеции дана биссектриса одного из внутренних углов, то проводится дополнительное построение треугольника, одна из сторон, которого содержит эту биссектрису, вторая совпадает со стороной данной фигуры, а третья или параллельна другой стороне этой фигуры, или получается при ее продолжении (рис. 17– рис. 20). Построенный треугольник является равнобедренным.

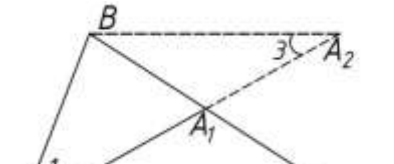


Рис.17

Рис.18

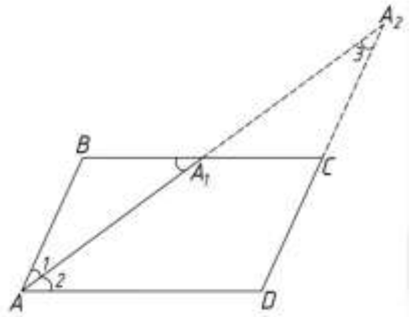


Рис.19

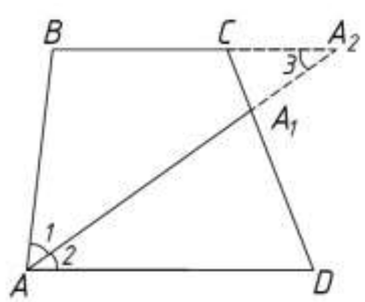


Рис.20

1.3.3 Построение дополнительной окружности

Если дан прямоугольный треугольник, то вокруг него описывается окружность, центром которой является середина гипотенузы.

Если дан четырехугольник, у которого суммы противоположных углов равны, то вокруг него описывается окружность. Признаком существования для четырехугольника описанной окружности обладают квадрат, прямоугольник и равнобедренная трапеция.

Если дан четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны, то в него вписывается окружность.

Если даны две окружности с общей внешней касательной, касающиеся друг друга внешним образом, то в рассмотрение вводится треугольник, вершинами которого служат три точки касания данных фигур (рис.21).

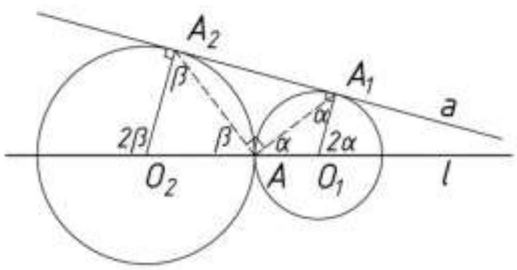


Рис.21

Треугольник AA_1A_2 является прямоугольным с прямым углом A (A – точка касания окружностей). Докажем, что угол $A_1AA_2 = 90°$.

ΔO_1AA_1 и ΔO_2AA_2 – равнобедренные. Пусть α и β углы при основаниях этих треугольников; тогда 2α – внешний угол при вершине O_1, 2β – внешний угол при вершине O_2. 2α и 2β - односторонние углы при $O_1A_1 \parallel O_2A_2$ и секущей O_1O_2, значит $2\alpha + 2\beta = 180°$, поэтому $\alpha + \beta = 90°$. $\angle A_1AA_2 = 180° - (\angle A_1AO_1 + \angle A_2AO_2) = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°$, что и требовалось доказать.

2 ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ

2.1 Решение задач методом дополнительных построений

Задача 1. Построение прямой параллельной одной из имеющихся (или параллельных прямых)

Две стороны треугольника равны 10см и 15см, угол между ними равен 60^0. Найти длину биссектрисы, проведённой из данного угла.

Решение: Δ ABC, AB= 10см, AC = 15см, < A = 60^0

AM – биссектриса -?

Проведём MN ∥ AB

< BAM = < MAN = < AMN = 30^0

Δ ANM – равнобедренный

AN = x,   NC = 15 – x

Δ ABC ~ Δ NMC,

NC : AC = MN : AB

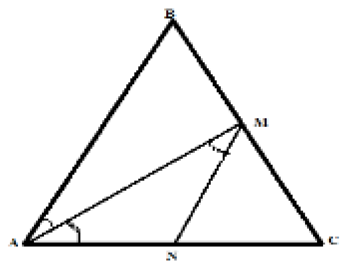
(15 – x) : 15 = x : 10

10(15 – x) = 15x

x = 6

AN = NC = 6

< ANM = $180^0 – 60^0 = 120^0$



По теореме косинусов:

$AM^2 = AN^2 + NM^2 – 2 \cdot AN \cdot NM \cdot \cos 120^0$

$AM^2 = 36 + 36 – 2 \cdot 36 \cdot \cos 120^0$

$AM^2 = 72 + 2 \cdot 36 \cdot \cos 60^0$

$AM^2 = 72 + 36 = 108$

AM = $\sqrt{108}$

Ответ: $\sqrt{108}$

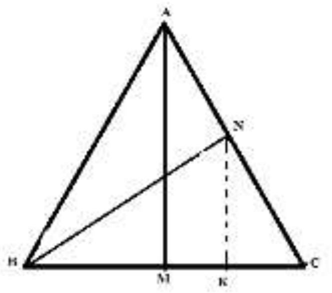
Задача 2. Построение прямой параллельной одной из имеющихся (или параллельных прямых)

В треугольнике ABC высота AM равна медиане BN. Найти < NBC.

Решение: Проведём NK ∥ AM

AN = NC, AM ∥ NK, тогда по теореме Фалеса

MK = KC.



NK – средняя линия Δ AMC,

NK = $\frac{1}{2}$ AM

Δ BNK – прямоугольный

NK = $\frac{1}{2}$ AM = $\frac{1}{2}$ = BN

Катет, лежащий против угла в 30^0 равен половине гипотенузы

< NBC = 30^0

Ответ: 30^0

Задача 3.Разбиение фигуры на части для получения треугольника и параллелограмма

Доказать, что если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

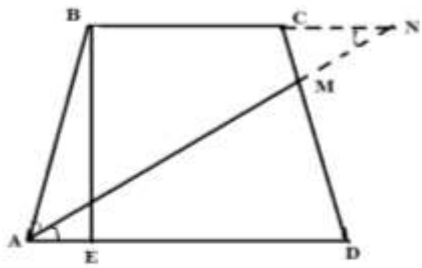
ABCD – трапеция, BD = AC

Доказать: AB = CD

Доказательство:

BD ∥ CM, DC = DM

< BDA = < CMA как соответственные угла при параллельных прямых.



BD = CM, BD = AC, тогда AC = CM,

Δ ACM – равнобедренный,

< CAM = < CMA

Δ ABD = Δ DCA (II признак равенства треугольников), тогда AB = CD,

ABCD – равнобокая трапеция.

Задача 4. Разбиение фигуры на части для получения треугольника и параллелограмма

Биссектриса острого угла равнобокой трапеции делит боковую сторону на отрезки длиной 20см и 30см, считая от меньшего основания, которое равно 6см. Найти площадь трапеции.

Решение:

BN ∥ AD , BN ∩ AN = N

Δ ABN – равнобедренный

< BAN = < BNA (накрест лежащие, BN ∥ AD)

AB =BN = 50 см,

CN = BN – BC = 50 – 6 = 44 см

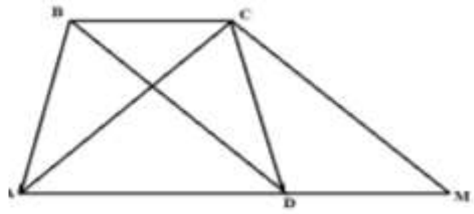
Δ AMD ~ Δ NCM

AD : 44 = 30 : 20

AD : CN = DM : CM

20 AD = 1320

AD = 66 см



S = $\frac{1}{2}$ (AD + BC) · BE

AE = $\frac{1}{2}$ (AD - BC) = 30 см

Δ AEB – прямоугольный

$BE^2 = AB^2 – AE^2$

BE^2 = 2500 – 900 = 1600

BE = 40

S = $\frac{1}{2}$ (66 + 6) · 40 = 1440 см^2

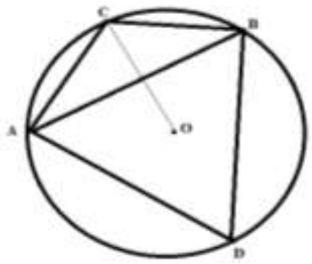
Ответ: 1440 см^2

Задача 5. Дополнительное построение окружности

На стороне AB треугольника ABC построен равносторонний треугольник ABD. Найти расстояние от центра этого треугольника до вершины C, если AB = 5√3, < ACB = 120^0.

Решение:

Опишем около четырёхугольника ABCD окружность.



$< C + < D = 180^0$ (сумма противолежащих углов)

$< A + < B = 360^0 - 180^0 = 180^0$

Δ ABC – вписанный в окружность. OC = R

$$R = \frac{AB\sqrt{3}}{3}, \qquad \text{где AB} = 5\sqrt{3}$$

$R = OC = \frac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 5$ см Ответ: 5 см

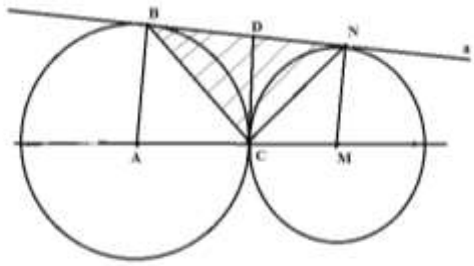
Задача 6.

Даны две окружности, касающиеся между собой внешним образом в точке C. Прямая a касается обеих окружностей. Найти расстояние от точки C до общей касательной a данных окружностей, если известны их радиусы $R_1 = 10$ см, $R_2 = 8$см. Найти: CD

Решение:

AB = 10 см, MN = 8 см

a– касательная к окружностям AB $\perp$ a, MN $\perp$ a, CD $\perp$ a, построим отрезки CB и CN



Δ BCN – прямоугольный, BN – гипотенуза, CD – высота, проведённая к гипотенузе

$CD^2 = BD \cdot DN$

Так как AB ∥ CD ∥ MN, то по теореме Фалеса

BD : DN = AC : CM

BD : DN = 5 : 4, BN = $2\sqrt{AB \cdot MN}$

BN = $2\sqrt{10 \cdot 8} = 8\sqrt{5}$

$$BD = \frac{5}{9} \cdot BN = \frac{5}{9} \cdot 8\sqrt{5}$$

$$DN = \frac{4}{9} \cdot BN = \frac{4}{9} \cdot 8\sqrt{5}$$

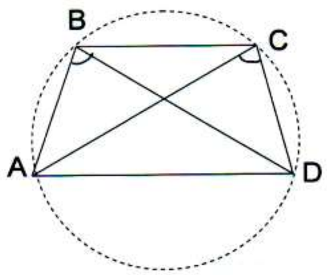
$$CD = \sqrt{BD \cdot DN} = \sqrt{\frac{40}{9} \cdot \frac{32}{9} \cdot 5} = \frac{80}{9}$$

Ответ: $\frac{80}{9}$ см

2.2 Применение метода дополнительный построений в решении задачи из ОГЭ и ЕГЭ

Пример (из открытого банка заданий ОГЭ ФИПИ) В трапеции ABCD с основаниями AD и BC угол ABD равен углу ACD. Доказать, что ABCD – равнобедренная трапеция.

Решение:

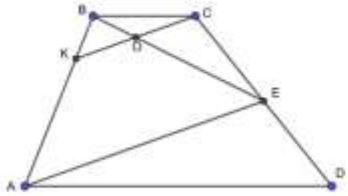


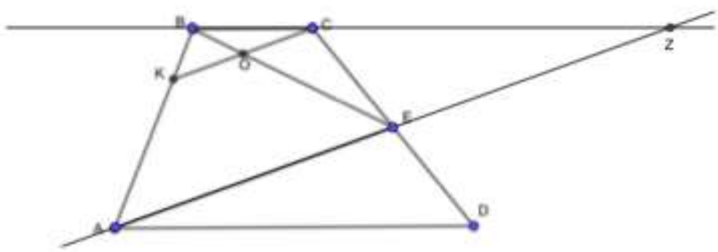
Точки B и C лежат по одну сторону от AD и углы < ABD = < ACD, то точки A, B, C,D лежат на окружности. Так как хорды BC ║ AD , то дуга AB равна дуге CD. Поскольку равные дуги стягивают равны хорды, то AB = CD.

Задачи с несколькими вариантами дополнительного построения

В условиях задания №т16 ЕГЭ пункт «б» может подсказать, какое решение задачи будет более удачным. Пример (из открытого банка заданий ЕГЭ ФИПИ)

Точка E — середина боковой стороны CD трапеции ABCD. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O. а) Докажите, что CO=KO. б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK

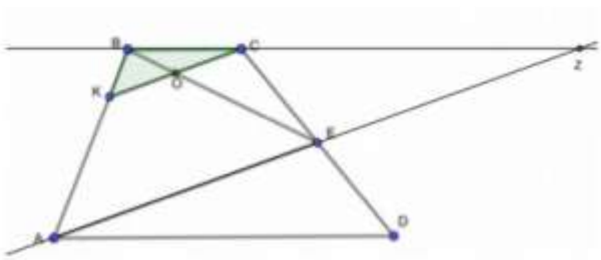


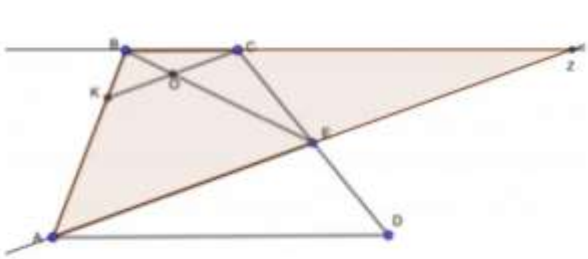


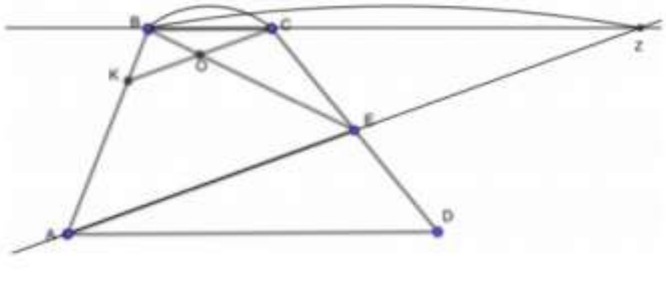
составляет 9/100 площади трапеции ABCD.

Решение: Первый вариант построения. Продлеваем BC и AE, вследствие чего появляются равные треугольники AED и ZEC. Так как AE=EZ, то BE — это медиана треугольника ABZ. КС и AZ параллельны. Медиана хороша тем, что она делит пополам не только сторону треугольника, но и любой отрезок, который этой стороне параллелен. Поэтому CO=KO. Площадь треугольника ABZ такая же, как площадь трапеции ABCD за счет равенства треугольников AED и ZEC. Треугольник KBC подобен треугольнику ABZ. Как известно, отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Отрезок BC, деленый на отрезок BZ, равен 3:10. На отрезок CZ приходится 7 частей. Ответ в пункте «б»: 3:7.

Второй вариант построения. Продолжим стороны AB и CD. Используя теорему, обратную теореме Фалеса, доказываем, что KB относится к BY так же, как YE к ED, и что отрезок KD параллелен BE. В треугольнике KCD видна середина CD. Отрезок OE параллелен KD и проходит через середину — следовательно, является средней линией и проходит через середину KC. Пункт «а» задания выполнен. Разобраться с пунктом «б» при данном дополнительном построении сложнее. К ответу 3:7 приводит то, что KB с BY соотносятся так же, как ED с YE.



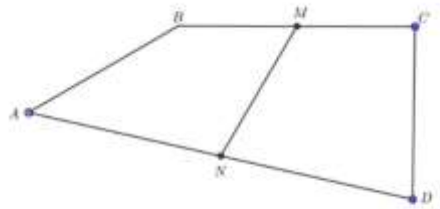




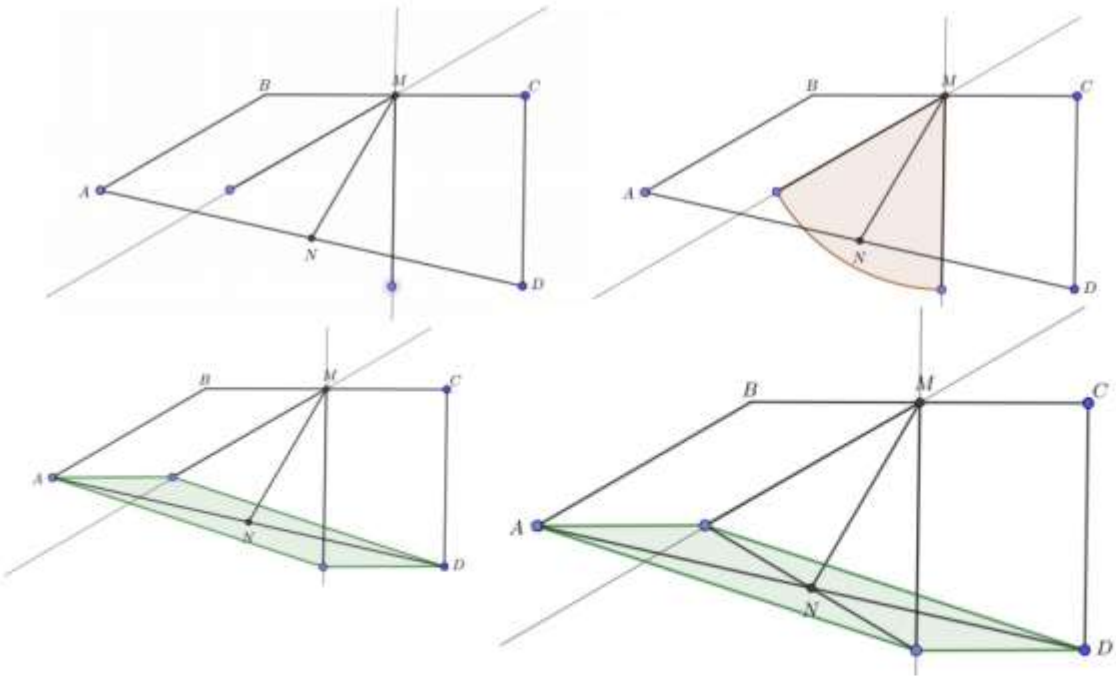
Задачи с разрозненными данными

Пример (из всероссийской олимпиады школьников по математике, 8 класс, 2017 год, II этап)

Точки M и N — середины сторон BC и AD четырехугольника ABCD. Известно, что $\angle B = 150°$, $\angle C = 90°$ и $AB = CD$. Найдите угол между прямыми MN и BC.



Решение: Начинаем компоновку данных с точки M и проводим через нее две прямые, параллельные AB и CD. Далее от точки M откладываем отрезки, равные AB и, соответственно, CD. Так получается заготовка для равнобедренного треугольника. Нужно понять, будет ли точка N лежать на отрезке, соединяющем две новые точки. Строятся новые отрезки, равные и параллельные BM и MC — получается четырехугольник-параллелограмм. AD является диагональю этого параллелограмма, а N — серединой диагонали. Также N лежит и на другой диагонали. Равнобедренный треугольник готов. Угол с вершиной M в нем равен 60°. Треугольник равносторонний, MN является медианой и биссектрисой. MN, пресекаясь с BC, образует угол, равный 60°.



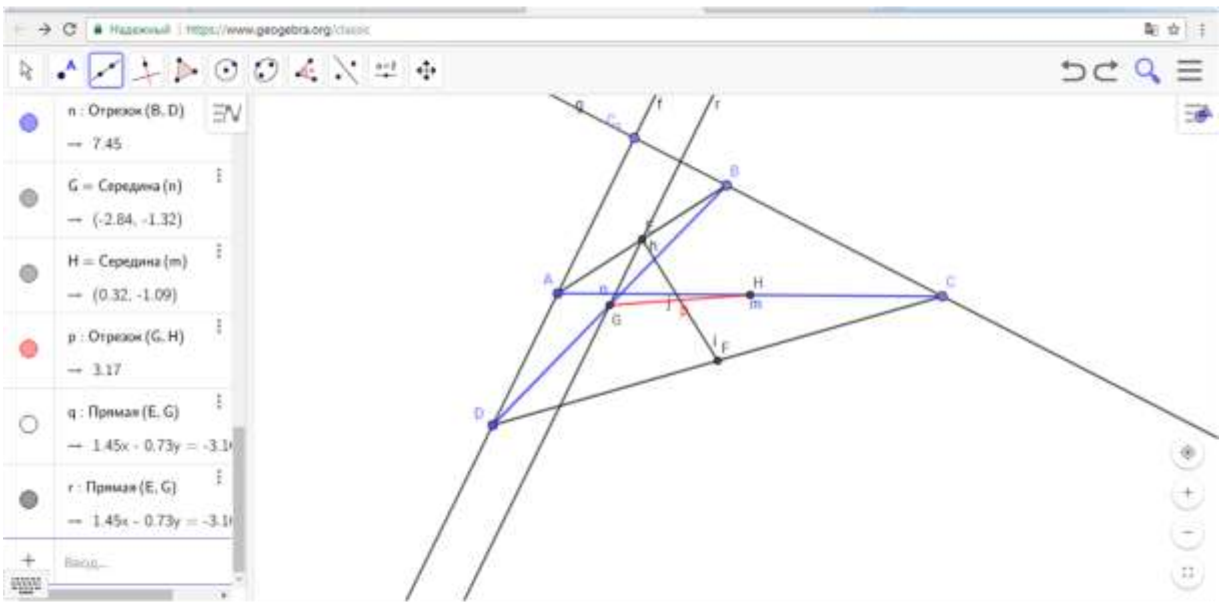
2.3 Решение задач с помощью программы GeoGebra

Программа динамической геометрии GeoGebra позволяет строить чертежи к геометрическим задачам. В стандартных ситуациях ее использование методически не всегда оправдано, а в некоторых задачах инструменты программы действительно помогают найти идею решения.

Рассмотрим пример геометрической задачи, входящей в материалы ОГЭ по математике (в спецификации ОГЭ — задача №24), для поиска решения которой действительно удобно использовать возможности программы GeoGebra:

Задача. В выпуклом четырехугольнике ABCD длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна одному метру. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

Сначала просто трудно сделать чертеж на бумаге. Поэтому выполним построение в среде GeoGebra.



Алгоритм построения:

— построить прямую AD

— построить прямую BC перпендикулярно AD

— построить середины отрезков AB и CD — точки E и F соответственно, построить отрезок EF

— построить отрезки AC и BD — диагонали четырехугольника ABCD

— построить середины отрезков AC и BD — точки H и G, построить отрезок HG

Перемещение исходных точек позволяет сформулировать гипотезу, что середины образуют прямоугольник. Гипотеза проверяется перемещением исходных точек.

Решение и обоснование становится очевидным. В прямоугольнике GEHF диагонали равны, следовательно, EF=GH= 1м.

Вывод: программа помогает провести анализ задачи, самостоятельно найти идею решения, проводя манипуляции с чертежом. Без программы нужно много раз выполнить построение или быть достаточно опытным или просто должно повезти.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе проделанной работы я изучила метод дополнительных построений при решении геометрических задач, провела группировку различных видов дополнительных построений.

Метод дополнительных построений при решении геометрических задач является непростым, так как нужное дополнительное построение не всегда удается определить с первого взгляда. Но, зная различные способы дополнительных построений и их применение, решение геометрической задачи становится намного проще, так появляются другие фигуры (чаще те, которые мы изучили), свойства которых нам известны.

Многие приёмы дополнительных построений, мне ещё предстоит изучить. В перспективе планирую более подробно изучить приёмы, связанные с построением вспомогательной окружности, построение симметричной фигуры относительно прямой, содержащей какую- либо сторону многоугольника.

Метод дополнительных построений помогает решать задачи понятно и красиво

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций/ Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев – 6-е изд., перераб. – М. : Просвещение, 2016.

2 Бежану, Т. В. К вопросу о геометрических решениях геометрических задач. Альманах современной науки и образования Тамбов: Грамота, 2009. № 6 (25). С. 26-29. ISSN 1993- 5552.

3 Дурова, Е.М. Метод дополнительных построений при решении планиметрических задач / Е.М. Дурова, Э.Ф. Капленко; Воронеж. ун-т.– Воронеж, 1995.– 16 с.– Деп. в ВИНИТИ 18.09.95, № 2580–В95.

4 Информационное сообщение о результатах регионального этапа и проведении заключительного этапа X олимпиады им. Леонарда Эйлера [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://matol.ru/index.php

5 Пойа, Д. Как решать задачу: Пособие для учителей / Пер. с англ. В. Звонарёвой и Д. Белла; Под ред. Ю. Гайдука. - Изд. 2-е.- М.: Учпедгиз, 1961. - 207 с.: ил. Пойа Д. Как решать задачу. – М., 1961 с.74.

6 Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. / И. Ф. Шарыгин. - Москва: Просвещение, 1989. - 252 с.

7 Формирование исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения решению планиметрических задач: [Электронный ресурс] учеб. пособие / С. Н. Скарбич ; науч. ред. д-р пед. наук, проф. В. А. Далингер. – 2-е изд., стереотип. – М. : ФЛИНТА, 2011. – 194 с.

8 Лысенко Ф.Ф.Подготовка к ЕГЭ 2010-2018 г. , Легион, Ростов на Дону

9 Задачи с окружностями [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://rosuchebnik.ru/material/dopolnitelnye-postroeniya-v-planimetrii/